Table des matières

partie I Énoncés

I Espaces probabilisés **3**
- I.1 Dénombrement . . . 3
- I.2 Formule du crible et applications . . . 4
- I.3 Probabilités conditionnelles . . . 6

II Variables aléatoires discrètes **9**
- II.1 Exercices de manipulation . . . 9
- II.2 Jeu de pile ou face . . . 11
- II.3 Lois conditionnelles . . . 13
- II.4 Modélisation . . . 14

III Variables aléatoires continues **19**
- III.1 Calculs de probabilités ou d'espérance . . . 19
- III.2 Calculs de loi . . . 20
- III.3 Modélisation . . . 21

IV Fonctions caractéristiques **27**
- IV.1 Calculs de loi . . . 27
- IV.2 Modélisation . . . 29

V Théorèmes limites **31**
- V.1 Quelques convergences . . . 31
- V.2 Calcul de limites . . . 34
- V.3 Modélisation . . . 36

VI Vecteurs gaussiens **43**
VI.1 Exemples 43
VI.2 Propriétés et applications 44

VII Simulation **47**

VIII Estimateurs **49**
VIII.1 Modèles paramétriques usuels 49
VIII.2 Modélisation 53

IX Tests **59**
IX.1 Mise en œuvre 59
IX.2 Modélisation 62
IX.3 Tests du χ^2 65

X Intervalles et régions de confiance **71**

XI Problèmes (probabilités) **73**
XI.1 Calcul de lois 73
XI.2 Le collectionneur 77
XI.3 Le paradoxe du bus 81
XI.4 La statistique de Mann et Whitney 86
XI.5 Le processus de Galton Watson 89
XI.6 Loi de Bose-Einstein 90
XI.7 Sondages (I) 93
XI.8 Loi de Yule (I) 95
XI.9 Mathématiques financières 97
XI.10 Transmission de message 100
XI.11 Mariage d'un prince 103
XI.12 Réduction de variance 107
XI.13 Modèle de compétition de Pòlya 108
XI.14 Nombres premiers 111

XII Problèmes (probabilités et statistique) **113**
XII.1 Le modèle de Hardy-Weinberg 113
XII.2 Estimation de la taille d'une population 116
XII.3 Comparaison de traitements 118
XII.4 Ensemencement des nuages 122
XII.5 Chaleur latente de fusion 126
XII.6 Taille des grandes villes 131
XII.7 Résistance d'une céramique 136
XII.8 Sondages (II) 140

XII.9 Loi de Yule (II) et disques d'or . . . 143
XII.10 Sexe des anges . . . 145
XII.11 Comparaison d'échantillons appariés . . . 148
XII.12 Modèle auto-régressif pour la température . . . 152
XII.13 Mutation de l'ADN mitochondrial . . . 156
XII.14 Estimation d'un quantile et produits de la mer . . . 160
XII.15 Records sportifs . . . 164
XII.16 Durée des grèves . . . 168
XII.17 Loi de Benford et détection de fraude . . . 172

partie II Corrections

XIII Corrections **179**
XIII.1 Espaces probabilisés . . . 179
XIII.2 Variables aléatoires discrètes . . . 189
XIII.3 Variables aléatoires continues . . . 207
XIII.4 Fonctions caractéristiques . . . 225
XIII.5 Théorèmes limites . . . 230
XIII.6 Vecteurs gaussiens . . . 249
XIII.7 Simulation . . . 256
XIII.8 Estimateurs . . . 259
XIII.9 Tests . . . 276
XIII.10 Intervalles et régions de confiance . . . 301
XIII.11 Problèmes (probabilités) . . . 306
XIII.12 Problèmes (probabilités et statistique) . . . 363

Index **445**

Première partie

Énoncés

I

Espaces probabilisés

I.1 Dénombrement

Exercice I.1 (Jeu de cartes)**.**
On tire au hasard deux cartes dans un jeu de 52 cartes.

1. Quelle est la probabilité pour que la couleur des deux cartes soit pique ?
2. Quelle est la probabilité pour que les deux cartes ne soient pas de la même couleur (pique, cœur, carreau, trèfle) ?
3. Quelle est la probabilité pour que la première carte soit un pique et la seconde un cœur ?
4. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un pique et un cœur ?
5. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un pique et un as ?

△

Exercice I.2 (Jeu de dés)**.**
Le joueur A possède deux dés à six faces, et le joueur B possède un dé à douze faces. Le joueur qui fait le plus grand score remporte la mise (match nul si égalité). Calculer la probabilité que A gagne et la probabilité d'avoir un match nul. Le jeu est-il équilibré ?

△

Exercice I.3 (Anniversaires simultanés)**.**
On considère une classe de n élèves. On suppose qu'il n'y a pas d'année bissextile.

1. Quelle est la probabilité, p_n, pour que deux élèves au moins aient la même date d'anniversaire ? Trouver le plus petit entier n_1 tel que $p_{n_1} \geq 0.5$. Calculer p_{366}.
2. Quelle est la probabilité, q_n, pour qu'au moins un élève ait la même date d'anniversaire que Socrate ? Calculer q_{n_1} et q_{366}.

△

Exercice I.4 (Jeu de pile ou face)**.**
Eugène et Diogène ont l'habitude de se retrouver chaque semaine autour d'un verre et de décider à pile ou face qui règle l'addition. Eugène se lamente d'avoir payé les quatre dernières additions et Diogène, pour faire plaisir à son ami, propose de modifier exceptionnellement la règle : "Eugène, tu vas lancer la pièce cinq fois et tu ne paieras que si on observe une suite d'au moins trois piles consécutifs ou d'au moins trois faces consécutives". Eugène se félicite d'avoir un si bon ami. À tort ou à raison ?

△

Exercice I.5 (Tirage avec remise et sans remise)**.**
Une urne contient r boules rouges et b boules bleues.

1. On tire **avec** remise $p \in \mathbb{N}^*$ boules. Calculer la probabilité pour qu'il y ait p_r boules rouges et p_b boules bleues ($p_r + p_b = p$).
2. On tire **sans** remise $p \leq r + b$ boules. Calculer la probabilité pour qu'il y ait p_r boules rouges et p_b boules bleues ($p_r \leq r$, $p_b \leq b$ et $p_r + p_b = p$).
3. Calculer, dans les deux cas, les probabilités limites quand $r \to \infty$, $b \to \infty$ et $r/(b + r) \to \theta \in]0, 1[$.

△

I.2 Formule du crible et applications

Exercice I.6 (Formule du crible)**.**
Soit $A_1, \cdots, A_n$ des évènements.

1. Montrer que $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$.
2. Montrer la formule du crible par récurrence.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p}). \qquad \text{(I.1)}$$

3. Inégalités de Bonferroni. Montrer, par récurrence sur n, que pour $1 \leq m \leq n$,

$$\sum_{p=1}^{m} (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{j_p})$$

est une majoration (resp. minoration) de $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ lorsque m est impair (resp. pair).

△

Exercice I.7 (Entente)**.**
Afin de savoir si les élèves travaillent indépendamment ou en groupe, un enseignant donne m exercices à une classe de n élèves et demande à chaque élève de choisir k exercices parmi les m.

1. Calculer la probabilité pour que les élèves aient tous choisi une combinaison fixée de k exercices.
2. Calculer la probabilité pour que tous les élèves aient choisi les k mêmes exercices.
3. Calculer la probabilité pour qu'une combinaison fixée à l'avance, n'ait pas été choisie.
4. Calculer la probabilité pour qu'il existe au moins une combinaison de k exercices qui n'ait pas été choisie. (On utilisera la formule du crible (I.1), cf. exercice I.6)
5. A.N. Donner les résultats pour $n = 20$, $m = 4$, $k = 2$. Comparer les valeurs pour les questions 1 et 2 puis 3 et 4. Que peut dire l'enseignant si tous les élèves ont choisi la même combinaison de 2 exercices ?

$\triangle$

Exercice I.8 (Nombre de Stirling)**.**
On utilise dans cet exercice la formule du crible (I.1) (cf exercice I.6). Soit $1 \leq k \leq n$.

1. Calculer à l'aide de la formule du crible le nombre de surjections de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, k\}$.
2. En déduire $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$, le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k sous-ensembles non vides. Les nombres $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ sont appelés les nombres de Stirling de deuxième espèce.
3. Montrer que

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1, \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0 \text{ si } k > n.$$

$\triangle$

Exercice I.9 (Points fixes d'une permutation)**.**
On utilise dans cet exercice la formule du crible (I.1) (cf exercice I.6).

1. Pour fêter leur réussite à un concours, n étudiants se donnent rendez-vous dans un chalet. En entrant chaque personne dépose sa veste dans un vestiaire. Au

petit matin, quand les esprits ne sont plus clairs, chacun prend au hasard une veste. Quelle est la probabilité pour qu'une personne au moins ait sa propre veste ?

2. En déduire le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ sans point fixe (problème formulé par P. R. de Montmort en 1708) [1]
3. En s'inspirant de la question 1, calculer la probabilité $\pi_n(k)$ pour que k personnes exactement aient leur propre veste.
4. Calculer la limite $\pi(k)$ de $\pi_n(k)$ quand n tend vers l'infini. Vérifier que la famille $(\pi(k), k \in \mathbb{N})$ détermine une probabilité sur $\mathbb{N}$. Il s'agit en fait de la loi de Poisson.

△

I.3 Probabilités conditionnelles

Exercice I.10 (Famille à deux enfants).
On suppose que l'on a autant de chance d'avoir une fille ou un garçon à la naissance (et qu'il n'y a pas de jumeau). Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un garçon ?
2. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant que l'aînée est une fille ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant qu'il a au moins une fille ?
4. Vous téléphonez à votre voisin. Une fille décroche le téléphone. Vous savez que dans les familles avec un garçon et une fille, la fille décroche le téléphone avec probabilité p, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?
5. Vous sonnez à la porte de votre voisin. Une fille ouvre la porte. Sachant que l'aîné(e) ouvre la porte avec probabilité p, et ce indépendamment de la répartition de la famille, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?

La question 3 a une variante [2] (laissée à la sagacité du lecteur) : Quelle est la probabilité que votre voisin qui a deux enfants, ait un garçon, sachant qu'il a une fille qui est née un mardi ?

△

Exercice I.11 (Test médical).
Les laboratoires pharmaceutiques indiquent pour chaque test sa sensibilité α, qui est la probabilité que le test soit positif si le sujet est malade, et sa spécificité β, qui est la probabilité que le test soit négatif si le sujet est sain. Sachant qu'en moyenne

1. L. Takacs. The problem of coincidences. *Arch. Hist. Exact Sci.*, vol. 21(3), pp. 229-244 (1980).
2. T. Khovanova. Martin Gardner's Mistake. `http://arxiv.org/pdf/1102.0173v1` (2011).

il y a un malade sur 1000 personnes, calculer la probabilité pour que vous soyez un sujet sain alors que votre test est positif, avec $\alpha = 98\%$ et $\beta = 97\%$. Calculer la probabilité d'être malade alors que le test est négatif. Commentaire.

△

Exercice I.12 (Couleur des yeux)**.**
Le gène qui détermine la couleur bleue des yeux est récessif. Pour avoir les yeux bleus, il faut donc avoir le génotype bb. Les génotypes mm et bm donnent des yeux marron. On suppose que les parents transmettent indifféremment un de leurs gènes à leurs enfants. La sœur et la femme d'Adrien ont les yeux bleus, mais ses parents ont les yeux marron.

1. Quelle est la probabilité pour qu'Adrien ait les yeux bleus ?
2. Quelle est la probabilité que le premier enfant d'Adrien ait les yeux bleus sachant qu'Adrien a les yeux marron ?
3. Quelle est la probabilité pour que le deuxième enfant d'Adrien ait les yeux bleus sachant que le premier a les yeux marron ?
4. Comment expliquez-vous la différence des résultats entre les deux dernières questions ?

△

Exercice I.13 (Paradoxe de Bertrand (1889))**.**
On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard. On expose une face au hasard. Elle est rouge. Parieriez-vous que la face cachée est blanche ? Pour vous aider dans votre choix :

1. Déterminer l'espace de probabilité.
2. Calculer la probabilité que la face cachée soit blanche sachant que la face visible est rouge.

△

Exercice I.14 (Let's Make a Deal)**.**
Le problème qui suit est inspiré du jeu télévisé américain "Let's Make a Deal" (1963-1977) présenté par Monty Hall[3]. On considère trois portes : A, B et C. Derrière l'une d'entre elles se trouve un cadeau et rien derrière les deux autres. Vous choisissez au hasard une des trois portes sans l'ouvrir, par exemple la porte A. À ce moment-là, le présentateur, qui sait derrière quelle porte se trouve le cadeau, ouvre une porte parmi les deux B et C, derrière laquelle il n'y a évidemment rien. On vous propose alors de changer ou non de porte, le but étant d'ouvrir la porte

3. Wikipedia : `http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem`.

qui cache le cadeau afin de gagner. L'objectif de cet exercice est de déterminer votre meilleure stratégie.

1. On suppose que si le cadeau est derrière la porte A, alors le présentateur choisit au hasard entre les deux autres portes. Calculer la probabilité pour que le cadeau soit derrière la porte B sachant que le présentateur ouvre la porte C. Que faites-vous ?
2. On suppose que si le cadeau est derrière la porte A, alors le présentateur choisit systématiquement la porte B. Que faites-vous si le présentateur ouvre la porte B (respectivement C) ?
3. Montrer que quelle que soit la valeur de la probabilité pour que le présentateur ouvre la porte B (respectivement C) sachant que le cadeau est derrière la porte A, vous avez intérêt à changer de porte. En déduire que la meilleure stratégie consiste à changer systématiquement de porte.
4. Une fois que le présentateur a ouvert une porte, et quel que soit le mécanisme de son choix, vous tirez à pile ou face pour choisir si vous changez ou non de porte. Quelle est votre probabilité de gagner le cadeau ? Vérifier que cette stratégie est moins bonne que la précédente.

$\triangle$